RESUMEN DE FÓRMULAS CLAVE PARA EL ALUMNO

1. **Producto Vectorial ($u \times v$):** El resultado es un **vector** perpendicular a ambos. Su módulo $|u \times v|$ representa el área del paralelogramo formado por ellos.
2. **Recta en $\mathbb{R}^3$:** Necesitas un punto P_0 y un vector director d.
3. **Plano en $\mathbb{R}^3$:** Necesitas un punto P_0 y un vector **normal** n (perpendicular al plano).
4. **Condición de Paralelismo:** Dos objetos son paralelos si sus vectores directores (o normales) son proporcionales.
5. **Condición de Perpendicularidad:** Dos objetos son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores característicos es **cero**.

Calcule y aplique la definición de producto vectorial.

1. Dados $u = (1, 2, -1)$ y $v = (2, 0, 3)$, halle $u \times v$ y verifique que el resultado es ortogonal a ambos.
2. Halle el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$ y $C(0, 4, 1)$.
3. Determine un vector unitario perpendicular a los vectores $a = (3, 1, 0)$ y $b = (-1, 2, 1)$.
4. Calcule el área del paralelogramo definido por los vectores $u = (2, -3, 1)$ y $v = (1, 4, 5)$.
5. Demuestre analíticamente que $u \times u = 0$ para cualquier vector u.

Halle las ecuaciones (Vectorial, Paramétrica y Simétrica) según los datos.

6. Halle la ecuación de la recta que pasa por $P(1, 0, -2)$ y tiene dirección $d = (4, -1, 3)$.
7. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2, 4, -1)$ y $B(5, 0, 7)$.
8. Dada la recta $L : (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(2, -1, 0)$, determine si el punto $Q(5, -1, 1)$ pertenece a ella.
9. Pase la siguiente recta a su forma simétrica: $x = 2 + 3t$; $y = 1 - t$; $z = 4t$.
10. Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, donde L_1 tiene dirección $(2, -4, 6)$ y L_2 pasa por $(0, 0, 0)$ y $(1, -2, 3)$.

Determine la ecuación general del plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

11. Halle la ecuación del plano que pasa por $P(1, 2, 3)$ y tiene vector normal $n = (4, 5, -1)$.
12. Encuentre el plano que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$.
13. Halle la ecuación del plano que contiene al punto $(2, 4, 1)$ y es paralelo al plano $3x - y + 2z = 5$.
14. Determine si el plano $2x - 3y + z = 6$ es perpendicular a la recta $(x, y, z) = t(2, -3, 1)$.
15. Halle la intersección del plano $x + y + z = 1$ con los ejes coordenados.

Analice cómo se relacionan los objetos en el espacio.

16. Determine si las rectas $L_1 : (1, 1, 0) + t(1, -1, 2)$ y $L_2 : (2, 0, 2) + s(-1, 1, 0)$ se interceptan, son paralelas o son alabeadas (skew).
17. Halle el ángulo entre los planos $\pi_1 : x + y = 1$ y $\pi_2 : y + z = 1$.
18. Encuentre el punto de intersección entre la recta $L : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ y el plano $x + 2y - z = 4$.
19. Determine si los planos $2x - y + 3z = 1$ y $4x - 2y + 6z = 5$ son paralelos o coincidentes.
20. Halle la recta de intersección entre los planos $x + y + z = 1$ y $2x - y + 3z = 2$.

Aplique las fórmulas de distancia mínima.

21. Calcule la distancia del punto $P(1, 2, 5)$ al plano $x - 2y + z = 3$.
22. Halle la distancia entre los planos paralelos $2x + y - 2z = 6$ y $2x + y - 2z = 12$.
23. Calcule la distancia del punto $Q(0, 0, 0)$ a la recta $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 0)$.
24. Halle la distancia mínima entre las rectas alabeadas L_1 y L_2 (ayuda: use el producto vectorial de sus directores).
25. Encuentre un punto en el eje Z que equidiste de los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(3, 2, 1)$.

Ejercicios avanzados de interacción entre rectas y planos.

26. Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, -1, 1)$, es perpendicular a la recta $L_1 : (x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, 2, -1)$ y paralela al plano $\pi : 2x - y + z = 0$.
27. Determine el **ángulo** que forma la recta $L : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, -1, 0)$ con el plano $\pi : x + y + 2z - 5 = 0$. (Recuerda que se usa el seno del ángulo entre el vector director y el normal).
28. Halle el **punto simétrico** del punto $P(1, 2, 4)$ respecto al plano $\pi : x - y + z = 2$.
29. Determine la **proyección ortogonal** del punto $Q(3, -1, 1)$ sobre la recta $L : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$.
30. Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta $L_1 : x = t, y = 2t, z = 3t$ y es paralelo a la recta $L_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{2}$.

Aplicaciones geométricas del determinante y el triple producto escalar.

31. Calcule el **volumen del paralelepípedo** definido por los vectores $u = (1, 0, 3)$, $v = (-1, 2, 1)$ y $w = (2, 2, 0)$ usando el producto mixto $|u \cdot (v \times w)|$.
32. Determine si los puntos $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ y $D(2, 1, 3)$ son **coplanares** (es decir, si pertenecen al mismo plano).
33. Halle el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen $(0, 0, 0)$ y los puntos de intersección del plano $2x + 3y + 4z = 12$ con los ejes coordenados.
34. Dado el volumen de un paralelepípedo $V = 10$ unidades cúbicas, formado por $a = (k, 1, 0)$, $b = (0, 2, 1)$ y $c = (1, 1, 1)$, encuentre los posibles valores de k.
35. Demuestre que el volumen de un tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo formado por los mismos vectores base.

36. Halle la ecuación de la recta que corta a las rectas $L_1 : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1)$ y $L_2 : (0, 1, 0) + s(1, 2, 1)$ perpendicularmente. (Se conoce como la **perpendicular común**).
37. Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta $L : x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t$ y que pasa por el punto $A(0, 5, 2)$.
38. Determine la posición relativa de las tres caras (planos) dadas por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + 3z = 5 \\ 3x + 4z = 7 \end{cases}$$

39. Halle la distancia entre las rectas paralelas $L_1 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(2, 1, -1)$ y $L_2 : (x, y, z) = (0, 1, 3) + s(2, 1, -1)$.
40. Un rayo de luz sale del punto $A(1, 2, 3)$, rebota en el plano $\pi : z = 0$ (el piso) y llega al punto $B(5, 6, 3)$. Determine el punto de impacto en el plano siguiendo la ley de reflexión (ángulo de incidencia = ángulo de reflexión).